A 38. ORTVAY RUDOLF FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI 2007

Az ELTE TTK Fizikus Diákköre, a Magyar Fizikus Hallgatók Egyesülete és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2007-ben is meghirdeti a hagyományos, immár 38-ik, ezúttal már tizedszer nemzetközi Ortvay Rudolf Fizikai Feladatmegoldó Versenyt. Időpont: 2007. október 26 – november 5.

Az Ortvay versenyen minden – hazai és külföldi – egyetemi hallgató indulhat. Az értékelés és a díjazás évfolyamonként történik. A doktoranduszok külön kategóriát alkotnak. A verseny egyéni: páros vagy csoportosan írt dolgozatokat nem fogadunk el. Kérjük a beadott feladatokon megadni a versenyző egyetemét, szakát és évfolyamát. Álnév vagy jelszó nem használható, minden versenyző valódi néven indul.

A feladatok **2007. október 26-án, pénteken, közép-európai idő szerint 12 órától (10:00 GMT)** magyar és angol nyelven, LaTeX, PDF és Postscript formátumban **letölthetők** az Ortvay-verseny weblapjáról:

http://ortvay.elte.hu/

Budapesten emellett a feladatok – ugyanettől az időponttól – nyomtatott formában is átvehetők az ELTE lágymányosi Fizika–Kémia tömbjének (H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A) földszinti társalgójában. A lágymányosi Mafihe irodában (2.106 szoba) a későbbiekben egy mesterpéldány áll a fénymásolni kivánók rendelkezésére.

A BME-n, a JATE-n, a KLTE-n, a JPTE-n és számos külföldi egyetemen helyi szervezők intézik a feladatok sokszorosítását és kiosztását.

Figyelem! A szervezők minden igyekezete ellenére is előfordulhat, hogy egy-egy értelemzavaró fogalmazási vagy gépelési hiba marad a feladatok szövegében. Érdemes ezért a továbbiakban is figyelni a fenti weblapot, illetve a lágymányosi Mafihe hirdetőtáblát, ahol az esetleges javításokat, módosításokat azonnal közzétesszük.

Egy versenyző maximálisan 10 feladat megoldását adhatja be. Minden feladat megoldása maximálisan 100 pontot ér.

A feladatok megoldásához *bármilyen segédeszköz használható*. Könyvre, folyóiratcikkre hivatkozni lehet.

Minden feladat megoldását külön A4-es lap(ok)ra kérjük leírni. Egy lapnak csak az egyik oldalára írjunk vagy nyomtassunk! Ne írjunk ceruzával vagy vékony másolópapírra – ezeket nem tudjuk elfaxolni a megoldások javítóinak. Az ilyen dolgozatokat nem fogadjuk el.

Ha a megoldáshoz számítógépes program is tartozik, kérjük írásban megadni a program részletes dokumentációját (milyen nyelven íródott, hogyan lehet elindítani, milyen paramétereket lehet beállítani, melyik betű mit jelent, hogyan kell a program készítette ábrákat vagy táblázatokat értelmezni, stb.) A programokat e-mailen lehet elküldeni az alább megadott címre.

A megoldásokat személyesen, postán, faxon vagy e-mailen (TeX, LaTeX PDF vagy Postscript formátumban) lehet beküldeni. Kérjük a versenyzőket, hogy csak az alapvető LaTeX stílusfájlokat használják, vagy a felhasznált speciális stílusfájlokat mellékeljék a beadott anyaghoz. Az elektronikusan beadott dolgozatokhoz – külön e-mailben – kérjük csatolni a tartalomjegyzéket és az esetleges kibontási útmutatót.

Személyesen a lágymányosi Északi tömbben, a Mafihe Irodában (2.106 szoba) lehet a megoldásokat leadni.

Postacím: ELTE TTK Fizikus Diákkör, Dávid Gyula, ELTE TTK Atomfizika Tanszék
H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A
Faxszám: Dávid Gyula, 36/1/3722753 vagy Cserti József, 36/1/3722866
E-mail cím: dgy@elte.hu

Beadási határidő: 2007. november 5. hétfő, közép-európai idő szerint 12 óra (11:00 GMT).

Kérjük, hogy a feladatok valamilyen formában történt postázása után minden versenyző töltse ki a verseny weblapjáról nyíló adatlapot. Ez a versenyzők és beadott megoldásaik azonosítására szolgál. **Figyelem! Az adatlap kitöltése nélkül a zsűri nem tudja elfogadni a beküldött megoldásokat! Az adatlap csak november 5-én és 6-án lesz elérhető, kérjük mielőbb kitölteni!**

A verseny díjazása évfolyamonként történik, az összpontszám alapján. A zsűri fenntartja a jogot, hogy egyes díjakat ne, megosztva vagy több példányban adjon ki. A pénzjutalommal járó 1., 2. és 3. díjak mellett dicséretek, illetve egyes feladatok kiváló megoldásáért különdíjak is odaítélhetők. Ezért már egy-két feladat megoldását is érdemes beadni!

A verseny eredményhirdetése december 7-én lesz, a hagyományos Fizikus Mikulással egybekötve. A pontos helyszínt később közöljük a verseny weblapján. Az ünnepélyes eredményhirdetést a feladatok megoldásának megvitatása követi. Az egyes feladatok legjobb megoldóit ezennel előre felkérjük, hogy ismertessék megoldásaikat. (A verseny egész Földre kiterjedt volta ellenére ez a felkérés értelemszerűen csak a hazai versenyzőkre vonatkozik.) A részletes eredmény ezután megtekinthető lesz a verseny weblapján. A díjazott versenyzőket e-mailben értesítjük, az okleveleket és a pénzjutalmakat az eredményhirdetésen nyújtjuk át, illetve külföldre postán küldjük el.

Sikeres versenyzést, tartalmas és hasznos fejtörést kívánunk minden versenyzőnek!

A verseny szervezői: Dávid Gyula, Cserti József
A feladatok fordítói: Kulacsy Katalin, Bernád József Zsolt, Csordás András, Farkas Zénó, Kaufmann Zoltán, Pályi András, Rácz Zoltán, Varga Dezső

1. Már másnap reggel ott álltak...

   Vasárnap rendben lement a megnyitó ünnepség, zászlók, táncok, vezető politikusok a világ minden tájáról, alig néhány csoport terrorista, emelkedett hangú beszédek a Naprendszer Kapujáról, az Űrkorszak Valódi Kezdetéről, a Második és immár Végleges Kapunyitásról, amikor már az egyszerű emberek és házi barkácsolású tudományos eszközeik, vagy egyszerűen az űrállomásokon eladásra szánt cseresznyéjük is olcsón, nagy tömegben eljuthat az űrbe... Végül átvágták a szalagot, és hivatalosan is üzembe helyezték az első Űrliftet, a szinkronpályán keringő űrállomás és az alatta levő egyenlítői pályaudvar (Lifthof, ahogy egy újságíró elnevezte) között feszülő, szén-nanocsövekből készült szalagot, amelyen lassan, kényelmesen, kis gyorsulással, kis terheléssel, és ennek következtében olcsón utazhat ember és teher az űrbeli átrakóállomásokra, onnan pedig a Naprendszer távoli tájaira. Megitták az utolsó pezsgőt, elhangzott az utolsó zeneszám, hazamentek, és másnap megkezdődhetett az űrlift tényleges működése.

   Másnap reggel, amikor a főmérnök megérkezett, már ott álltak. Negyven-ötven fura alak, széltől és naptól cserzett arccal, félig profi, félig szedett-vedettnek tűnő felszereléssel, és nagy elszántsággal. Valamennyien utazni akartak az űrlifttel, de nem az űrállomásra, hiszen menet közben ki akartak ugrani... És ezért még fizetni is hajlandóak voltak.

   A főmérnök hüledezve hallgatta Joe Jumpert, a bázisugrók csoportjának vezetőjét. Ők voltak azok, akik felhőkarcolókról, rádió- és tv-tornyokról, magas sziklafalakról vetették magukat a mélybe, hogy néhány vagy néhányszor tíz másodperces szabadesés után kinyissák ejtőernyőjüket, és leereszkedjenek a fal tövébe. Persze csak akkor, ha a szél vagy a rosszul sikerült ugrás nem csapta őket már korábban a toronyhoz vagy a sziklafalhoz. Olykor napokat utaztak és másztak azért a kis szabadesésért. És most itt van előttük ez a több tízezer kilométeres, a szó szoros értelmében az égbe nyúló torony, amely akár több órányi szabadesést is kínálhat nekik – hát persze, hogy természetesnek érezték: azért épült, hogy leugorjanak róla, minél magasabbról, annál jobb. Beszereztek vagy barkácsoltak néhány használt szkafandert, hővédő pajzsot, és itt álltak, ugrásra készen.

   A főmérnök persze elkergette őket. Így tett a következő napokban is. Amikor azonban már negyvenkettedszer kellett megszakítani a soron következő űrszállítási feladatot, hogy kipiszkálják a rakomány közül a bázisugró potyautast, komolyan elgondolkodott. Itt a hatalmas kereslet (akkor már több száz ugró várakozott reggelenként, sóvárogva nézve az égbe nyúló karcsú szálat), ők pedig egy kis pluszberuházással ki tudják elégíteni ezt az igényt. Elég, ha néhány platformot építenek a lift pályáján – egyet a kezdőknek, pár mérföld magasságban, egyet a haladóknak, a magaslégkörben, és persze egyet a profiknak, a lehető legmagasabban, ahonnan még éppen le lehet ugrani a Földre. Az utolsó száz kilométeren már az ugrók hőpajzsa, majd ejtőernyője játssza a főszerepet, de ez már az ő gondjuk, majd kötelezővé teszik a biztosítást...

   Az Űrlift igazgató tanácsa némi habozás után PR-szempontból hasznosnak ítélte a dolgot, és rábólintott az építkezésre, így a gondolatot hamarosan tett követte. Pár hónap múlva elkészült a maximális magasságba helyezett platform is, és a bázisugrók (space jumperek, ahogy attól kezdve magukat hívták) boldog arccal léptek le a platformról, majd szálltak el a semmibe.

   Kérdések: a) Milyen magasan épült a platform? b) Mennyi ideig tartott az ugrás (tekintsünk el a sűrű légkörben megtett utolsó kb. száz km-től, ez nagyrészt az ugró egyéni felszerelésétől és ügyességétől függött)? c) Milyen messze érték földet az űrlift földi végállomásától, a Lifthoftól?

   Voltak, akik állandóan ott nyüzsögtek. Amint földet értek, máris utaztak a Lifthofhoz, és befizettek a következő emelkedésre. Hamarosan felmerült az ötlet, hogy sokkal egyszerűbb lenne, ha közvetlenül a torony tövében érhetnének földet. El is kezdték követelni egy újabb platform építését. A főmérnök sajnálkozva tárta szét a kezét: hiába, a fizika törvényei... De aztán gyorsan rájött a megoldásra: nem elég egyszerűen lepottyanni, hanem (valami kezdősebességet adó segédeszközzel) vízszintesen el is kell rugaszkodni a platformtól.

   Kérdés: d) Mekkora sebességgel?

   Egy ideig zavartalanul folyt az ugrálás, az űrugrók hozzászoktak a kilövőgéphez, a balesetek és halálesetek száma beállt egy állandó, az egyéb extrém spotokhoz képest viszonylag csekély értékre. Aztán a nyughatatlan Joe Jumper ráébredt arra, hogy az utolsó száz kilométer, a légkör és a földet érés csak feleslegesen bonyolítja a kalandot. Másszunk magasabbra, ugorjunk magasabbról! – adta ki a jelszót. A többiek figyelmeztették, hogy ha elkerüli a Földet, örökké ott keringhet körülötte. Ő azonban egyetemista korában hallott valamit harangozni arról, hogy egy teljes keringés után a mozgó test visszatér eredeti pozíciójába. Majd elkapom a platformot, ahonnan indultam, iszom egy kávét, és jöhet a következő ugrás, ráadásul ismét fenékbe billentés nélkül – mondta csillogó szemmel. A főmérnök ismét a fizika törvényeire hivatkozva próbálta leszerelni, de tudta, úgyis hiába. Hamarosan elkészült az új platform, magasabban, mint a régi, de a legalacsonyabb ponton, amellyel teljesíteni lehetett a még újabb sportág, a Permanens Űrugrás híveinek kívánságait: ugrásuk után térjenek vissza ahhoz a ponthoz, ahhoz a platformhoz, ahonnan elindultak.

   Kérdések: e) Milyen magasan épült az új platform? f) Mennyi időre való oxigént kellett csomagolniuk az ugróknak? g) Mikor és milyen magasan jártak a legközelebb a Földhöz? Pótkérdések: h) Rajzoljuk fel mindhárom fajta ugró pályáját az űrlift kábelét feszesen tartó geostacionárius űrállomás koordinátarendszeréből nézve!

   (Dávid Gyula)

2. Miért és hogyan forog a virsli a hosszanti tengelye körül forró (de nem lobogó) vízben? Végezzünk kísérleteket, figyeljük meg és magyarázzuk meg a tapasztalt jelenséget! (Javaslat: a virsli legyen egyszerű műbeles baromfivirsli, héja legyen lehúzva. A vizet sózzuk meg!)

   (Koltai János)

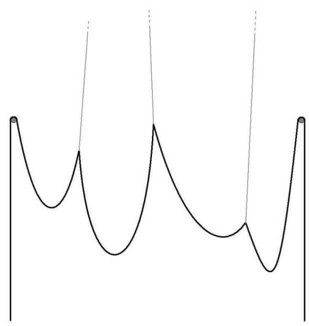
3. Egy homogén anyagú tórusz (keresztmetszetének sugara r, középvonalának sugara R, ahol $r << R$) v kezdősebességgel szabadon csúszik egy vízszintes lapon. Saját szimmetriatengelye körül forog is, indításkor ω_0 kezdő szögsebességgel. A csúszási súrlódási együttható μ. A légellenállás elhanyagolható. Hogyan mozog a tömegközéppontja? Adjuk meg a pályáját!

(Veres Gábor)

4. Egy elég nagy űrhajó kering a Föld körül. Milyen az űrhajó koordinátarendszerében a belsejében mozgó tömegpontra ható erő, és milyen a szabad tömegpont pályája?

(Tichy Géza)

5. Egy hosszú láncot két, azonos magasságban lévő szögre akasztunk, majd a lánc szögek közötti részét több, nagyon hosszú, de különböző hosszúságú fonallal a mennyezethez erősítjük az ábra szerint. Rajzoljuk le vázlatosan, hogyan fog kinézni a lánc a statikus egyensúly állapotában! (A fonalak szabadon elcsúszhatnak a láncon, a súrlódás mindenütt elhanyagolható. A lánc elegendően hosszú ahhoz, hogy két fonal között „belógjon”.)



(Vigh Máté)

6. Egy elegendően hosszú sínen súrlódásmentesen mozoghat három azonos tömegű kiskocsi. Zárjuk le a sín két végét tökéletesen rugalmas ütközőkkel, majd kössük össze a kocsikat azonos ω körfrekvenciájú, l hosszúságú rugókkal! Lökjük meg mindhárom kocsit azonos irányú, azonos nagyságú v sebességgel, majd írjuk le a mozgást!

a) Írjuk le a kocsik mozgását az első és a második ütközés között! Mikor következik be a második ütközés? (Tegyük fel, hogy két kocsi soha nem ütközhet, azaz $3v^2 < \omega^2 l^2$!)
b) Vizsgáljuk meg numerikusan, hogy hány ütközés zajlhat le, mire a tömegközéppont sebessége irányt vált és a három kocsi elindul a másik ütköző felé! (Írjunk algoritmust, amelyik egy már bekövetkezett ütközés paraméterei függvényében kiszámolja a következő ütközés adatait, de ne az időfejlődést szimuláljuk!)
c) Vizsgáljuk a rendszert sok idő múlva! Átlagosan mekkora energia tárolódik az egyes módusokban? Vajon a Boltzmann-eloszlás valósul meg? Próbáljunk e kérdésre elméleti jóslatot is adni!

(Pozsgai Balázs)

7. Egy lineáris láncot első és másodszomszédok között ható rugók kapcsolnak össze. Az elsőszomszéd rugók hossza a, a másodszomszédoké $b \neq 2a$. Mekkora lesz a tömegpontok távolsága, ha a lánc nincs megfeszítve?

(Tichy Géza)

8. Egy m meredekségű ferde sík alakú domboldalra, amelyen egy festékes doboz áll, forrón süt a Nap. A festékes doboz egyszer csak felrobban. A festékcseppek minden irányba sűrűn, egyforma v kezdősebességgel indulnak, és egymástól függetlenül repülnek tovább. Milyen alakú folt keletkezik a domboldalon?

(Kaufmann Zoltán)

9. Egy űrállomáson a parancsnok gyereke ugrókötelezni akar. Ugrálni ugyan nem tud, de állandó szögsebességgel forgatja a kötelet. Milyen alakú lesz az ugrókötél?

(Gnädig Péter)

10. Lehet-e zsonglőrgépet készíteni? Elvileg nem kell hozzá más, csak pár nagy tömegű sík lap, amelyeket egy gép meghatározott ritmus szerint fel-le vagy valami ferde irányba mozgat, miközben rajtuk majdnem tökéletesen rugalmas golyók pattognak egy alkalmas mintázat szerint.

    A legegyszerűbb „egydimenziós” zsonglőrgép egyetlen darab vízszintes lapból áll, amit $T/2$ ideig felfelé, $T/2$ ideig lefelé mozgatunk V sebességgel. Ha e szerkezet fölött elengedünk egy golyót, az pattogni kezd. Az ütközési állandó κ. Alkalmas paramétereket választva elérhetjük, hogy stacionárius mozgás alakuljon ki. Mi ennek a feltétele? Mikor lesz stabil egy ilyen mozgás?

    Egy primitív, egylabdás, de kétdimenziós zsonglőrgép lehet a következő: vegyünk két síklapot egymástól L távolságra, döntsük meg őket α ill. $-\alpha$ szögben, majd mozgassuk őket a síkjukra merőleges irányban fel-le V sebességgel, fél periódus időeltolással! (amikor az egyik fent van, akkor van lent a másik) Mi a stacionárius pálya feltétele, és milyen paraméterértékek esetén stabil ez a pálya? Mutassuk meg (numerikusan), hogy bizonyos α_c felett tetszőleges κ mellett is instabil a rendszer! (Feltételezhetjük, hogy az ütközés során mindkét oldalon κ az ütközési állandó.)

    Javasoljunk más elrendezést is! Mit tudunk mondani a `http://youtube.com/watch?v=sBHGzRxfeJY` videón látható szerkezetekről?

    (Pozsgai Balázs)

11. Egy pontrészecske Hamilton-függvénye legyen az impulzus tetszőleges függvénye, azaz $H = f(\mathbf{p})$ alakú. Milyen lesz a Newton-egyenlet elektromos és mágneses tér jelenlétében?

    (Tichy Géza)

12. Becsüljük meg, hogy mennyit változik meg a Föld tengely körüli forgásideje egy vulkánkitörés következtében! Kimérhető-e ez az effektus valamilyen interferométerrel? Milyen paraméterei legyenek az interferométernek?

    (Cserti József)

13. A szélmalmok, szélkerekek a levegő mozgási energiájának egy részét hasznosítják. Vizsgáljuk meg a szélkerekek elméletileg elérhető maximális hatásfokát a következő egyszerűsített, egydimenziós modell segítségével! A szél fújjon a szélkerék felületére merőlegesen, a levegő sebessége legyen nagy távolsággal a szélkerék előtt V, míg messze a szélkerék mögött αV $(0 \leq \alpha \leq 1)$! A szélkerék A nagyságú felülete mentén legyen a szél sebessége v!

    a) Fejezzük ki α segítségével a v/V arányt!
    b) Határozzuk meg a szélkerék elméletileg elérhető maximális hatásfokát ebben a modellben!

    Útmutatás: A szélmalmok, szélkerekek hatásfokát azzal szokás jellemezni, hogy mennyi energiát képesek felvenni a kerekeikre merőleges irányból, messziről érkező, A keresztmetszetű levegőtömegből.

    (Honyek Gyula)

14. Teal'c egy goauld fogságába került, aki a hajóján tartja fogva. A goauld nem törődik Teal'c helyzetével, az agyát akarja elfoglalni. Teal'c már észlelte, hogy behatoltak az elméjébe. Az ősi jaffa technikával megkísérelte az ellenállást, de ez nem volt elég. Mivel nem akarja az elméjét és a testét átadni az ellenségnek, ezért elhatározza, hogy öngyilkos lesz.

    Először is tájékozodik. Egy $a = 5$ m élhosszúságú kocka alakú teremben ül egy széken, a szoba „alján”, a kocka négyzet alakú alaplapjának középén. A szoba levegőjének hőmérséklete 300 K, a nyomása 100 kPa, összetétele 20 % O_2 és 80 % N_2. Teal'c tudja, hogy a szoba egyik falának túloldalán az űr van. Úgy dönt, hogy eltávolítja a szoba oldalát, és meghal a levegő elszökése következtében.

    Ezt kétféleképpen teheti meg: a) ha a fal tolóajtó, azt 1 ezredmásodperc alatt félre tudja tolni; b) egyszerűen leválasztja a falat, ekkor azt semmi nem csatolja a hajóhoz, ezért a belső nyomás elkezdi eltaszítani.

    CsK-1 a közelben van, és meg tudná menteni Teal'c-et, de ez időbe telik. Azt kérdezik a fizikusoktól, hogy a fal eltávolítása után mennyi idejük még van Teal'c megmentésére. Tudják, hogy a levegő elszökése során sem a szék, sem a hozzá rögzített Teal'c nem mozdul el. Azt is tudják, hogy a gyors nyomáscsökkenés során beálló fizikai károsodások miatt egy ember 20 kPa nyomáson meghal. De Teal'c nem ember, ő csak 10 kPa nyomásnál pusztul el.

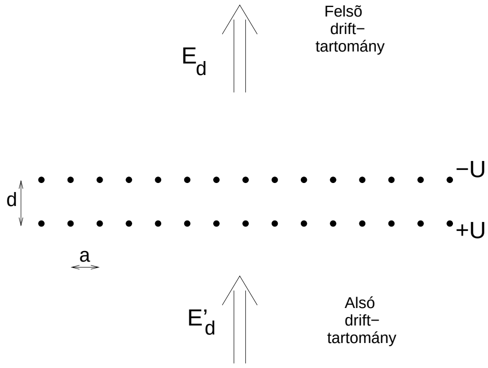
    Mennyi ideje lenne a megmentésre CsK-1-nek, ha Teal'c ember lenne? Mennyi ideje van a megmentésre CsK-1-nek Teal'c esetében? Függ-e a kocka a élhosszától ez az idő? Ha függ, akkor hogyan? Milyen élhosszúság esetén a leghosszabb ez az idő?

    (Horváth István)

15. Mutassuk meg, hogy ha a szilárd anyagot párpotenciál hozza létre, akkor a C_{ijkl} rugalmas állandó tenzor komponenseinek értékei nem függnek az indexek sorrendjétől!

    (Tichy Géza)

16. Elkészítjük az ábrán látható, a lap síkjára merőlegesen eltolásszimmetrikus, periodikus elektróda-elrendezést. Az elhanyagolhatóan (de nem végtelenül) vékony, r sugarú szálakat $+U$ illetve $-U$ potenciálra kapcsoljuk. A rendszerben a szálak síkjától távol még elhelyezünk nagy, ezzel párhuzamos síkú elektródákat, melyek biztosítják, hogy a szálaktól távol E_d (fölül) illetve E'_d (alul) homogén elektromos tér alakuljon ki (ezeket a homogén tartományokat nevezzük most drift-tartományoknak). Az U feszültség elég nagy is lehet, leginkább az $U/d > E_d$ eset érdekel minket.



a) Az egész rendszert tiszta gázba helyezzük, melyben ha ionok keletkeznek, azok az elektromos tér hatására lassan mozognak. Tekintsünk negatív ionokat: ezek sebessége minden pillanatban pontosan az elektromos térrel lesz arányos:

$$\mathbf{v} = -\mu \mathbf{E}$$

A μ arányossági tényező (mozgékonyság) függ a gáz tulajdonságaitól, most adottnak tekintjük. Hanyagoljuk el az ionok saját töltése által keltett teret is.

Milyen pályákon fognak haladni az ionok, amik a felső drift-tartományból indulnak? Az ionoknak hányad része jut át az alsó drift-tartományba?

b) Tekintsünk most elektronokat, melyek tiszta gázban hasonlóan mozognak az ionokhoz, csak diffúziójuk nem elhanyagolható (viszont a szabad úthossz már kicsi és elhanyagolható). Ez azt jelenti, hogy sebességük csak átlagosan egyenlő az elektromos térrel:

$$< \mathbf{v} >= -\mu \mathbf{E}$$

viszont ehhez hozzáadódik egy diffúz mozgás, ami miatt egy rövid t idő alatt átlagosan $\eta\sqrt{t}$ távolságra jutnak arrébb véletlenszerűen. A felső drift-tartományból az elektronok mekkora része jut át az alsó drift-tartományba?

c) Kvalitatíven milyen jelenségeket okoz, ha az ionok saját töltését (ezt tértöltésnek nevezik) figyelembe vesszük? Pl. hogy változik az alsó drift-tartományba jutó ionok/elektronok száma, az átjutás sebessége, az ionok/elektronok által a szálak között érzett legnagyobb térerősség?

(Varga Dezső)

17. A geometriai optika alapján számítsuk ki, hogy hova kell elhelyezni egy pontszerű fényforrást egy R sugarú, gömbalakú, negatív törésmutatójú közegben ($n < -1$), hogy a gömbből kilépő fénysugarak egy pontban találkozzanak! Tanulmányozzuk a problémát a Maxwell-egyenletek alapján is, azaz ha R összemérhető a fény hullámhosszával!

(Cserti József)

18. Egy optikai rács egymás mellett lévő a vastagságú csíkokból áll. Az egyes csíkok egymástól függetlenül p valószínűséggel sötétek és $1 - p$ valószínűséggel világosak. Milyen lesz a Fraunhofer-féle elhajlási kép?

(Tichy Géza)

19. Egyik nap a Hortobágy felett délibáb keletkezik. A levegő törésmutatója felfelé csökken a z magasság alábbi függvénye szerint:

$$n(z) = n_0 \sqrt{1 - \frac{z^2}{h^2}},$$

ahol n_0 a talajmenti törésmutató és h egy hosszúság dimenziójú állandó. Milyen pályát futnak be a talaj szintjén elhelyezett, pontszerűnek tekinthető lámpából kiinduló fénysugarak? Ha ugyanakkor kevés köd vagy füst keveredik a levegőbe, akkor e ködfelhőnek milyen alakú részét világítja meg a lámpa?

(Kaufmann Zoltán)

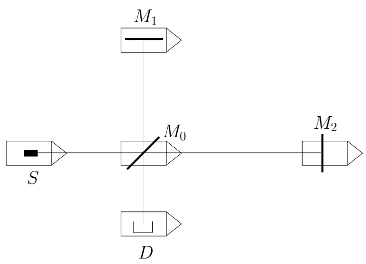
20. Fénynyaláb terjed egy végtelen sok, egymással párhuzamosan, egymástól b távolságban elhelyezett, a vastagságú, n törésmutatójú planparelel üveglemezből álló rendszeren át a lemezekre merőleges irányban. A lemezek között $n = 1$ törésmutatójúnak tekinthető levegő van.
a) Mutassuk meg, hogy vannak olyan frekvencia-intervallumok, amelyekbe eső frekvenciájú fényhullám nem terjedhet a rendszerben!
b) Számítsuk ki analitikusan a megengedett és tiltott frekvenciasávok határfrekvenciáit a következő esetekben: $n = 2$ és $b = a$, illetve $n = 2$ és $b = 2a$!

(Dávid Gyula)

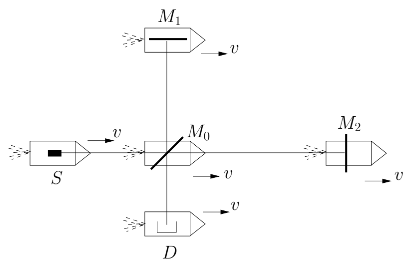
21. Egy árammal átjárt, általános háromszög alakú vezetőkeret síkjában a háromszögön belül hol a legkisebb a mágneses indukció értéke?

(Vigh Máté)

22. Képzeljünk el egy Michelson-Morley kísérletet úgy, hogy a fényforrás (S), a félig áteresztő tükör (M_0), a két tükör (M_1 és M_2), valamint a fénydetektor (D) egy-egy rakétán van elhelyezve. A rakéták tömege azonos és azonos erejű a hajtóművük. Első helyzetben a rakéták állnak egy adott inerciarendszerben (1. ábra). A detektorban egy adott interferencia-képet figyelünk meg. Most egyszerre beindítjuk a hajtóműveket, majd egyszerre kikapcsoljuk. Így a rakétákat ugyanarra a v sebességre gyorsítjuk fel (2. ábra). Tapasztalunk-e eltolódást az interferencia-képben?



1. ábra



2. ábra

(Szabó László)

23. Tudjuk, hogy az $F_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k$ elektromágneses térerősség-tenzorból két független Lorentz-invariáns skalárt lehet képezni:

$$P = -\frac{1}{4} F_{kl} F^{kl} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2\right), \quad \text{és} \quad Q = -\frac{1}{4} F_{kl} \bar{F}^{kl} = \mathbf{EB},$$

ahol $\bar{F}^{kl} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{klpq} F_{pq}$ a térerősség-tenzor Hodge-duálisa. Válasszuk most a vákuumbeli elektrodinamika Lagrange-sűrűségfüggvényének a két invariáns lineáris kombinációját:

$$\mathcal{L} = \alpha P + \beta Q - \frac{1}{c} A_k j^k \quad !$$

Írjuk fel a téregyenleteket, és hasonlítsuk össze a szokásos alakkal! Milyenek lesznek az egyenletek lineárisan, illetve cirkulárisan polarizált síkhullám-megoldásai? Vizsgáljuk meg az $\alpha = 0$, $\beta = 1$ esetet! Ismételjük meg a számításokat 2+1 dimenzióban (két tér- és egy idődimenzió) is! Milyen szimmetriái vannak a módosított hatásintegrálnak, és milyenek nincsenek?

(Dávid Gyula)

24. Tegyük fel, hogy Világegyetemünk terének görbülete mindenhol állandó, pozitív érték, így az általunk érzékelt fizikai világ valójában egy „négydimenziós gömb felszíne”, aminek mi csupán egy közel síknak tekinthető részletét ismerjük. Vajon az általunk ismert elektrosztatika törvényei összeegyeztethetők-e ezzel a világegyetem-modellel? Vizsgáljuk meg a ponttöltés által létrehozott elektrosztatikus mezőt a teljes „gömbfelszínen”! Adjunk kritériumot arra, hogy milyen töltéselrendezések létezhetnek! Adjunk általános eljárást egy töltéselrendezés elektrosztatikus mezőjének kiszámítására! Az eredmény felhasználásával írjuk le egyetlen elektromos dipólus hatását! Először válaszoljuk meg a kétdimenziós elektrosztatika fenti kérdéseit egy hagyományos gömb felszínéből álló világegyetemre! Milyen hasonló eljárással lehetne a magnetosztatika egyenleteit is kiterjeszteni e görbült világegyetem teljes tartományára? Plusz kérdés: Hogyan fér össze a Faraday-kalitka csak befelé történő árnyékoló hatása a „gömbfelszín” kívül-belül szimmetriájával? (Azaz honnan tudja Faraday, hogy melyik a kalitka belseje?)

(Kómár Péter)

25. A relativisztikus elektrodinamika egy lehetséges nemlineáris általánosításként javasolták a következő modellt: Legyen E_0 egy térerősség-dimenziójú természeti állandó (az ún. maximális térerősség)! A vákuumbeli elektrodinamika Lagrange-sűrűségfüggvénye legyen a következő alakú:

$$\mathcal{L} = E_0^2 \sqrt{1 - \frac{F_{kl}F^{kl}}{2E_0^2}} - \frac{1}{c} A_k j^k.$$

Írjuk fel az „anyagi” egyenleteket, és vezessük le a forrásos Maxwell-egyenletek megfelelőit háromdimenziós alakban! Milyen alakú lesz a Coulomb-törvény? Hát a síkhullámok diszperziós relációja? Milyen kísérlettel lehetne megkülönböztetni e nemlineáris elektrodinamika és a szokásos Maxwell-elmélet által leírt jelenségeket?

(Dávid Gyula)

26. Becsüljük meg a kétkarú mérleggel való tömegmérésnek a határozatlansági reláció által létrejövő hibáját! Hogyan emelkedik a mérés hibája a hőmérséklettel?

(Tichy Géza)

27. Végtelen vékony kvantum-drótban elektron-síkhullám halad. A mozgást leíró Hamilton-operátor $H_0 = p_x^2/2m$. A drót egy véges hosszúságú tartományában az elektron kölcsönhat egy V sztatikus spinfüggő potenciállal. A kölcsönhatás következményeképpen a hullám részben továbbhalad, részben visszaverődik. Adjuk meg a visszavert hullám spin-polarizacióvektorát, ha tudjuk, hogy a beeső hullám tiszta spinállapotú, spin-polarizációvektora $\mathbf{P}$, és a V potenciálnak szimmetriája az időtükrözés!

(Pályi András)

28. Egy harmonikus oszcillátor fázisdiffúziójának modellje a következő master-egyenlettel írható le:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\Gamma[a^\dagger a, [a^\dagger a, \rho]].$$

Számoljuk ki a ρ sűrűségmátrix P-reprezentációjának Fokker-Planck egyenletét! Továbbá határozzuk meg a Fokker-Planck egyenlethez tartozó Langevin-egyenleteket!

(Bernád József Zsolt)

29. Rögzített n_r, l, s mellett az $a^+_{m,\nu}$ fermion-típusú keltő operátorok ($m = -l, \ldots, l$ és $\nu = -s, \ldots, s$) egy részecskét keltenek az (n_r, l, s) héjban (n_r a radiális kvantumszám, az l egész szám a héj pályaimpulzus kvantumszáma, az s félegész szám a héj spin-kvantumszáma, pl. elektronokra $s = 1/2$). Tegyük fel, hogy a Hilbert-tér bázisát az

$$a^+_{m_1,\nu_1} \ldots a^+_{m_k,\nu_k} |0\rangle$$

Fock-vektorok alkotják, ahol $k = 0, 1, \ldots, (2l+1)(2s+1)$; $m_i = -l, \ldots, l$; $\nu_i = -s, \ldots, s$ és $i = 1, \ldots, k$. Állítsuk elő ezen a bázison az állapotok teljes pályaimpulzusmomentumát és spinjét mérő $L_z, S_z, \mathbf{L}^2$ és $\mathbf{S}^2$ operátorokat az előbbi keltő és eltüntető operátorokkal! ($\mathbf{L}^2$ sajátértékei $\hbar^2 L(L+1)$, míg $\mathbf{S}^2$ sajátértékei $\hbar^2 S(S+1)$.) Milyen L és S kvantumszámokkal rendelkeznek a kétrészecskés $\mathbf{L}^2, L_z, \mathbf{S}^2, S_z$ sajátállapotok $l = 2, s = 3/2$ esetén? Hányszorosan degeneráltak ezek az állapotok? Milyen alakú az $L = 0, S = 0$ kvantumszámokkal jellemzett kétrészecske-állapot?

(Csordás András)

30. Vizsgáljuk tömegtelen klasszikus mezőelméletek konform invarianciáját!
a) Tekintsünk egy $\Phi(x)$ skalármezőt D dimenziós euklideszi téridőben a szabad Lagrange-függvénnyel, $L = \frac{1}{2}\partial_i\Phi\partial_i\Phi$! A téregyenlet ez esetben a D dimenziós Laplace-egyenlet: $\partial_{ii}\Phi = 0$. Mutassuk meg, hogy a téridő szokásos szimmetriáin kívül az egységgömbre való inverzió is szimmetriája az elméletnek! Azaz, ha egy x_i vektor invertáltja alatt az $\bar{x}_i = \frac{x_i}{|x|^2}$ vektort értjük, akkor lássuk be, hogy egy alkalmas κ-t választva a

$$\Phi'(x) = \frac{1}{r^\kappa}\Phi(\bar{x})$$

képlettel megadott skalármező pontosan akkor elégíti ki a Laplace-egyenletet, amikor az eredeti $\Phi(x)$! Mi lesz D és κ kapcsolata? Mi köze van ennek a relációnak a $\Phi(x)$ mező tömegdimenziójához? Milyen teret állít elő az inverzió a $\Phi(x) = A$ konstans mezőből?
b) Hogyan módosítsuk a képleteket, ha egy tömegtelen $A_i(x)$ vektormező inverzióját szeretnénk leírni? Hogyan tudjuk figyelembe venni azt a tényt, hogy az inverzió egy helyfüggő lokális tértükrözést is magában foglal?
c) Hogyan lehet leírni az inverziót a $D = 4$ tömegtelen Dirac-mező esetén? Legyen a Lagrange-függvény $L = i\bar{\Psi}\gamma_i\partial_i\Psi$, ahol $\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\delta_{ij}$. Lássuk be, hogy semmilyen egyszerű átskálázás nem elegendő! Ehelyett egy

$$\Psi'(x) = \frac{1}{r^\delta}P(x)\Psi(\bar{x})$$

képletet keressünk, ahol $P(x)$ egy x-függő, a Dirac-mátrixokból felépített operátor, és $P^2 = 1$. Mi lesz a δ kitevő, mi a viszonya a Dirac-mező tömegdimenziójához?
d) Végezzünk el a téridőn és a rajta élő mezőkön egy inverziót, egy infinitezimális eltolást, majd ismét egy inverziót! Ekkor az eredeti x vektor közelébe érünk vissza. Írjuk fel a mezőkön végrehajtódó infinitezimális transzformációkat! Melyek a közös tagok, és melyek függnek a Lorentz-transzformációs tulajdonságoktól? Mi lesz két ilyen „speciális” konform transzformáció kommutátora?

(Pozsgai Balázs)

31. Feltételezések szerint a Torinói lepel Jézus halotti leple volt, vagyis 1970 éves. A ^{14}C radioizotópos kormeghatározás viszont csak 660 évesnek, azaz sokkalta fiatalabbnak találta, ami a lepel hamisítvány voltára utal. Felvetődött azonban, hogy a lepel szálait nemrégen baktériumok támadták meg, és a levegőből friss, elbomlatlan ^{14}C atomokat kevertek a lepel szálaiba. Becsüljük meg, hogy a ^{14}C kormeghatározáshoz használt szálakban található szénatomok mekkora hányadának kell(ene) ebből a modern kori szennyeződésből származnia, hogy ez megmagyarázza a várt és a mért kor eltérését!
Útmutatás: Tételezzük fel, hogy a levegő és az élő anyag széntartalmában a ^{14}C hányada azonos és állandó! A ^{14}C izotóp felezési ideje 5730 év.

(Takács László)

32. Egy fogadóirodában a következő játékot lehet játszani 1000 Ft-ért. Adnak egy zárt borítékot, amelyben egy ismeretlen egész szám (N_{bor}) van felírva. Ezután 1 milliószor húzunk a normál eloszlásból, amelynek a valószínűségsűrűsége $P(x) = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$ (számítógép és a megfelelő program rendelkezésre áll). Kiválasztjuk a kapott legnagyobb értéket (x_{max}), s kerekítjük a legközelebbi egészhez: N_{max} =Kerekít(x_{max}). Ezután felnyitjuk a borítékot, s ha azt találjuk, hogy $N_{max} = N_{bor}$, akkor pénzünk elveszett. Ellenkező esetben viszont visszakapjuk pénzünket, plusz még 10000 Ft-ot.

Kérdések: a) Milyen szám van a borítékban? b) Érdemes-e fogadni a fenti játékban?

(Ozogány Katalin és Rácz Zoltán)

\end{document}